$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 6 = 0$

D'après 1) b/ on a $\ell = -2$ ou $\ell = 3$

Comme $\ell \geq 0$ alors $\ell = 3$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3}$

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 3 = \sqrt{U_n + 6} - 3$$
$$= \frac{U_n + 6 - 9}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{U_n - 3}{\sqrt{U_n + 6} + 3}$$

Or $\sqrt{U_n + 6} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{U_n + 6} + 3 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}$$

Il en résulte :

$$\frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} = \frac{|U_n - 3|}{\sqrt{U_n + 6} + 3} \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

b/ on a $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

Multiplions membre à membre

$$|U_n - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-1} - 3|$$
$$\times \quad |U_{n-1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-2} - 3|$$
$$\times \quad |U_{n-2} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_{n-3} - 3|$$
$$\times \quad \vdots$$
$$|U_1 - 3| \leq \frac{1}{3}|U_0 - 3|$$

$$= |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - 3|$$

Or $|U_0 - 3| = |-3| = 3$

Donc $|U_n - 3| \leq 3.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boxed{|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

c/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - 3| = 0$ et par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 3$$

Exercice 4

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{cases}$$

1) a/ $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$5 - \frac{12}{U_n + 3} = \frac{5(U_n + 3) - 12}{U_n + 3}$$
$$= \frac{5U_n + 15 - 12}{U_n + 3} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} = 5 - \frac{12}{U_n + 3}$

b/ i/ pour $n = 0 : 0 \leq U_0 = 1 < 3$ vrai

ii/ supposons que $0 \leq U_n < 3$

et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 3$

En effet :

$0 \leq U_n < 3 \Leftrightarrow 3 \leq U_n + 3 < 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{U_n + 3} \leq \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-12}{3} \leq \frac{-12}{U_n + 3} < \frac{-12}{6}$$
$$\Leftrightarrow 5 - 4 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 5 - 2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 5 - \frac{-12}{U_n + 3} < 3$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_{n+1} < 3$

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n < 3$

c/ $U_{n+1} - U_n = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} - U_n, n \in \mathbb{N}$